УДК 517.9

В.М. ДЕУНДЯК, Е.А. СТЕПАНЮЧЕНКО

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ ПОСЛОЙНО СИНГУЛЯРНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(R^2)$

Введен новый класс двумерных интегральных операторов с однородными ядрами, включающий в себя известный класс операторов с SO(2)-инвариантными ядрами. Для банаховой алгебры, порожденной парными операторами такого вида, на основе билокального метода построено символическое исчисление, с помощью которого получен критерий фредгольмовости.
Ключевые слова: *интегральные операторы, однородные ядра, символическое исчисление, фредгольмовость.*

Введение и постановка задачи. Пусть $1< p, p'<\infty$ и $1/p+1/p'=1$. Исследованию разрешимости интегральных операторов с однородными ядрами в пространстве $L_p(\mathbf{R}^n)$ посвящено много работ [1-4]. Отметим, что если условия ограниченности получены для произвольных операторов такого типа [1-2], то при исследовании фредгольмовости и вычислении индекса на ядра, кроме условия суммируемости, накладывалось также, как правило, условие инвариантности относительно диагонального действия группы ортогональных преобразований SO(n) [1, 3, 4].

В настоящей работе для n=2 строится новая банахова алгебра интегральных операторов с однородными ядрами, которая, с одной стороны, включает в себя класс операторов с SO(2)-инвариантными ядрами, а с другой - пространственно подобна некоторой алгебре операторов билокального типа. Последнее обстоятельство используется для построения символического исчисления и исследования фредгольмовости. Часть представленных в настоящей работе результатов анонсирована в [5].

Операторы с однородными ядрами. Прежде всего введем некоторые обозначения. Если **B** **– б**анахово пространство, то End(**B**) **–** банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в **B**, Comp(**B**) **–** идеал компактных операторов, Fr(**B**) – пространство фредгольмовых операторов. Изоморфизм банаховых пространств $\alpha: \mathbf{B}_1\to\mathbf{B}_2$ задает изоморфизм подобия банаховых алгебр $\hat{\alpha}$: $End(\mathbf{B}_1) \to End(\mathbf{B}_2)$ по правилу: $A(\in End(\mathbf{B}_1))|\to \alpha A\alpha^{-1}(\in End(\mathbf{B}_2))$. Если U произвольная банахова алгебра, то U^+ – унитализация U.

Для компакта X и нормированного пространства Y через C(X,Y) будем обозначать пространство непрерывных отображений X в Y с равномерной топологией; пусть C(X) = C(X,**C**). Для локально компактного некомпактного пространства X банахово пространство отображений из C(X,Y), стремящихся к 0 на бесконечности, обозначим $C_0(X,Y)$; пусть $C_0(X)= C_0(X,\mathbf{C})$.

Для произвольных банаховых алгебр M ($\subset$ End(L_p(X))) и N ($\subset$End(L_p(Y))), где X, Y – компакты с мерами, через M$\circ$N обозначим алгебраическое тензорное произведение M и N, т.е. множество операторов вида $\sum_j A_j \circ B_j$, где $A_j\in$ M, $B_j \in$ N, а через M$\otimes$N – топологическое тензорное произведение M и N, т.е. замыкание M$\circ$N в пространстве End(L_p(X$\times$Y)).

На прямой **R** плоскости $\mathbf{R}^2$ и единичной окружности **T**($\subset\mathbf{R}^2$) введем стандартные меры. Пусть $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{R}_-$ — положительная и отрицательная полуоси прямой **R**. Определенная на $\mathbf{R}^2$ функция *k* называется однородной степени (-2), если выполняется условие:

$$\forall\alpha\in \mathbf{R}_+,\ \forall(x,y)\in\mathbf{R}^2:\quad k(\alpha x,\alpha y)=\alpha^{-2}k(x, y). \qquad (1)$$

Будем полагать, что однородная степени (-2) функция *k* принадлежит классу M($\mathbf{R}^2$), если почти для всех *s* ($\in$**T)** интегралы

$$\kappa_{k,1}(s) = \int_{R^2} k(s,y)|y|^{-2/p}dy, \qquad \kappa_{k,2}(s) = \int_{R^2} k(y,s)|y|^{-2/p}dy$$

конечны и $\kappa_{k,i}\in L_\infty(\mathbf{T})$.

В [2] доказано, что оператор

$$(L_k(f))x) = \int_{R^2} k(x,y)f(y)dy, \qquad (2)$$

где $k\in$M($\mathbf{R}^2$) является ограниченным в пространстве $L_p(\mathbf{R}^2)$. Через $Inv_{SO(2)}(\mathbf{R}^2)$ обозначим класс функций *k*, удовлетворяющих условию однородности (1), условию инвариантности относительно диагонального действия группы SO(2)

$$\forall\omega\in SO(2),\ \forall(x,y)\in\mathbf{R}^2:\quad k(\omega(x),\omega(y))= k(x,y) \qquad (3)$$

и суммируемости

$$\int_{R^2} k((1,0),y)|y|^{-2/p}dy < \infty. \qquad (4)$$

В силу [1]-[2] из условий (3), (4) вытекает, что $\kappa_{k,i}\in L_\infty(\mathbf{T})$, поэтому $Inv_{SO(2)}(\mathbf{R}^2)\subset$M($\mathbf{R}^2$). Банахову алгебру, порожденную операторами вида (2) с ядрами из $Inv_{SO(2)}(\mathbf{R}^2)$, обозначим $Op_p(Inv_{SO(2)}(\mathbf{R}^2))$.

Для произвольной функции $k\in$M($\mathbf{R}^2$) через $k_{[1]}$ обозначим ее ограничение на **T**$\times$**T**. Будем говорить, что функция *k* из M($\mathbf{R}^2$) принадлежит классу FC($\mathbf{R}^2$), если $k_{[1]}\in L_\infty(\mathbf{T}\times\mathbf{T})$. Известно, что действующие в пространстве $L_p(\mathbf{T})$ интегральные операторы с ядрами из $L_\infty(\mathbf{T}\times\mathbf{T})$ принадлежат идеалу Comp($L_p(\mathbf{T})$). Банахову алгебру, порожденную операторами вида (2) с ядрами из FC($\mathbf{R}^2$), обозначим Op_p(FC($\mathbf{R}^2$)).

Операторы из Op_p(FC($\mathbf{R}^2$)) можно рассматривать как *компактные в слоях* при естественном расслоении проколотой плоскости на центрированные окружности. Таким образом, при исследовании операторов с однород-

ными ядрами удобно перейти от декартовой системы координат в $\mathbf{R}^2$ к полярной системе. Этот переход определяет изоморфизм

$$\pi: L_p(\mathbf{R}^2) \to L_p(\mathbf{R}_+\times\mathbf{T}, r\otimes 1),$$

который задает изоморфизм подобия банаховых алгебр

$$\hat{\pi}: End(L_p(\mathbf{R}^2)) \to End(L_p(\mathbf{R}_+\times\mathbf{T}, r\otimes 1)).$$

В пространстве $L_p(\mathbf{R}_+, r)$ рассмотрим банахову алгебру $V_{p,r}(\mathbf{R}_+)$ [1], порожденную операторами вида

$$(L_k(f))(r) = \int_0^{+\infty} k(r,\rho) f(\rho) d\rho\ , \tag{5}$$

где $k(r,\rho)$ – однородная степени (-1) функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{+\infty} |k(1,\rho)|\,|\rho|^{-2/p}\, d\rho < \infty\ ,$$

а в пространстве $L_p(\mathbf{T})$ – банахову алгебру $w_p(\mathbf{T})$, порожденную сингулярным интегральным оператором Коши

$$(S_p(f))(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\vartheta)}{s-\vartheta} d\vartheta \tag{6}$$

и операторами умножения на непрерывные функции [1, 6]. Рассмотрим топологическое тензорное произведение $V_{p,r}(\mathbf{R}_+)\otimes w_p(\mathbf{T})$ ($\subset End(L_p(\mathbf{R}_+\times\mathbf{T}, r\otimes 1))$). При расслоении проколотой плоскости на центрированные окружности операторы из $\hat{\pi}^{-1}(V_{p,r}(\mathbf{R}_+)\otimes w_p(\mathbf{T}))$ можно рассматривать как *послойно сингулярные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами*.

Класс ядер операторов из $\hat{\pi}^{-1}(V_{p,r}(\mathbf{R}_+)\circ w_p(\mathbf{T}))$ обозначим через $FS(\mathbf{R}^2)$; пусть $Op_p(FS(\mathbf{R}^2))=\hat{\pi}^{-1}(V_{p,r}(\mathbf{R}_+)\otimes w_p(\mathbf{T}))$.

Лемма 1. $Op_p(Inv_{SO(2)}(\mathbf{R}^2))\subset Op_p(FC(\mathbf{R}^2))\subset Op_p(FS(\mathbf{R}^2))$.

Доказательство. Вложение

$$Op_p(FC(\mathbf{R}^2)) \subset Op_p(FS(\mathbf{R}^2))$$

вытекает из определений рассматриваемых алгебр и того факта, что действующие в пространстве $L_p(\mathbf{T})$ интегральные операторы с ядрами из $L_\infty(\mathbf{T}\times\mathbf{T})$ порождают идеал $Comp(L_p(\mathbf{T}))$, содержащийся, в свою очередь, в банаховой алгебре $w_p(\mathbf{T})$. Вложение

$$Op_p(Inv_{SO(2)}(\mathbf{R}^2))\subset Op_p(FC(\mathbf{R}^2))$$

проверяется по схеме доказательства теоремы 2.1 [см. 7. С. 8-9], где фактически рассмотрен в n-мерной ситуации случай p=2. П

Парные операторы с однородными ядрами специального вида. Пусть χ_0 – характеристическая функция единичного круга плоскости $\mathbf{R}^2$ с центром в нуле, $\chi_\infty=1-\chi_0$, $\Xi\in\{Inv_{SO(2)}(\mathbf{R}^2);\ FC(\mathbf{R}^2);\ FS(\mathbf{R}^2)\}$, а $Alg_p(\Xi)$ – замкнутая подалгебра банаховой $End(L_p(\mathbf{R}^2))$, порожденная операторами вида

$$A= \lambda I + \chi_0 A_0 + \chi_\infty A_\infty + F, \tag{7}$$

где $\lambda\in\mathbf{C}$, $F\in Comp(L_p(\mathbf{R}^2))$, $\{A_0; A_\infty\} \subset Op_p(\Xi)$. Из леммы 1 выводится

Теорема 1. $Alg_p(Inv_{SO(2)}(\mathbf{R}^2)) \subset Alg_p(FC(\mathbf{R}^2)) \subset Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))$. ∈

Многомерные аналоги операторов из банаховой алгебры $Alg_p(Inv_{SO(2)}(\mathbf{R}^2))$ исследованы на фредгольмовость в работах [3, 4].

Чтобы построить символ и исследовать фредгольмовость операторов из более широкой банаховой алгебры $Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))$, приведем в удобном для нас виде необходимые сведения о сингулярных интегральных операторах и операторах свертки, содержащиеся, например, в [1], [6], [8]. Произвольный оператор $A \in w_p(\mathbf{T})$ запишем в виде

$$A = a_- P_- + a_+ P_+ + F, \tag{8}$$

где $F \in Comp(L_p(\mathbf{R}))$; $a_\pm \in C(\mathbf{T})$; $P_\pm = (1/2)(I_T \pm S_T)$ (см.(6)).

Пусть $S(\mathbf{T}) = C(\mathbf{T} \times \{-1;+1\})$. Соответствие $\{A| \to \sigma_{\mathbf{T}}(A)\}$, где $(\sigma_{\mathbf{T}}(A))(t, \pm 1) = a_\pm(t)$ порождает символ-эпиморфизм банаховых алгебр $\sigma_{\mathbf{T}}$: $w_p(\mathbf{T}) \to S(\mathbf{T})$ с ядром $Comp(L_p(\mathbf{T}))$. Рассмотрим теперь замкнутую подалгебру $V_p(\mathbf{R})$ банаховой алгебры $End(L_p(\mathbf{R}))$, порожденную операторами свертки на группе $\mathbf{R}$:

$$(C_a(f))(x) = \int_{-}^{+} a(x-y) f(y) dy, \tag{9}$$

где $a \in L_1(\mathbf{R})$.

Банаховы алгебры $V_{p,r}(\mathbf{R}_+)$ и $V_p(\mathbf{R})$ пространственно подобны. Действительно, зададим изоморфизм u: $L_p(\mathbf{R}_+, r) \to L_p(\mathbf{R})$ формулой

$$(u(f))(x) = (\exp(-2x/p))\, f(\exp(-x)).$$

Легко видеть, что обратный изоморфизм u: $L_p(\mathbf{R}) \to L_p(\mathbf{R}_+, r)$ определяется следующей формулой:

$$(u^{-1}(g))(x) = y^{-2/p} g(-\ln(y)).$$

Прямыми вычислениями проверяется

Лемма 2. Ограничение изоморфизма $\hat{u}$: $End(L_p(\mathbf{R}_+, r)) \to End(L_p(\mathbf{R}))$ на $V_{p,r}(\mathbf{R}_+)$ осуществляет изоморфизм $V_{p,r}(\mathbf{R}_+)$ на $V_p(\mathbf{R})$, причем $\hat{u}(L_k) = C_a$, где L_k – оператор вида (5), а C_a – оператор вида (8), причем

$$a(t) = e^{-tp/2} k(e^{-t}, 1). \in$$

Пусть $\overline{R}$ - компактификация **R** двумя бесконечно удаленными точками $\pm$. Сопоставим оператору свертки C_a преобразование Фурье ядра a и тем самым зададим мономорфизм банаховых алгебр $s_{R,p}: V_p(\mathbf{R}) \to C_0(\mathbf{R})$, являющийся в случае p=2 изометрическим изоморфизмом. Введем на $C_{0,p}(\mathbf{R}) = s_{R,p}(V_p(\mathbf{R}))$ топологию пространства L_p-мультипликаторов, в которой $s_{R,p}$ осуществляет гомеоморфизм $V_p(\mathbf{R})$ на $C_{0,p}(\mathbf{R})$. Элементы банаховой алгебры $(C_{0,p}(\mathbf{R}))^+$ можно рассматривать как функции, определенные на одноточечной компактификации $\dot{R} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Пусть $C_p(\dot{R}) = (C_{0,p}(\mathbf{R}))^+$. Банахова алгебра $C_p(\dot{R})$ непрерывно вложена в банахову алгебру $C(\dot{R})$ и $C_2(\dot{R}) = C(\dot{R})$. Через $W_p(\mathbf{R})$ обозначим замкнутую подалгебру алгебры $End((L_p(\mathbf{R}))$, порожденную операторами

$$B = \lambda I + \chi_- A_- + \chi_+ A_+ + F,$$

где $A_\pm \in V_p(\mathbf{R})$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $F \in Comp(L_p(\mathbf{R}))$, $\chi_\pm$ – характеристическая функция полуоси $\boldsymbol{R}_\pm$. Отметим, что

$$C(\overline{R})V_p(\mathbf{R}) \subset W_p(\mathbf{R}).$$

Пусть $S_0=\{-1;+1\}$, $\Lambda=(\mathbf{R}\times S_0)^\bullet$ – одноточечная компактификация $\mathbf{R}\times S_0$. Рассмотрим банахову алгебру

$$S_p(\mathbf{R})=\{\varphi\in C(\Lambda):\ \varphi_\pm=\varphi_{|\mathbf{R}\times\{\pm1\}}\in C_p(\mathbf{R})\}$$

с обычной нормой

$$||\varphi||=\max\{||\varphi_+||_{Cp(\mathbf{R})};\ ||\varphi_-||_{Cp(\mathbf{R})}\}.$$

Правило $\{B|\to\sigma_{\mathbf{R}}(B)\}$, где $(\sigma_{\mathbf{R}}(B))(t,\pm1)=\lambda+(s_{\mathbf{R},p}(A_\pm))(t)$ при $t\in\mathbf{R}$ и $(\sigma_{\mathbf{R}}(B))(\infty)=\lambda$, порождает символ-эпиморфизм банаховых алгебр

$$\sigma_{\mathbf{R}}:W_p(\mathbf{R})\to S_p(\mathbf{R})$$

с ядром $Comp(L_p(\mathbf{R}))$.

Рассмотрим банаховы алгебры:

$$\Xi_f=W_p(\mathbf{R})\otimes C(\mathbf{T}\times\{-1;+1\})(=C(\mathbf{T}\times\{-1;+1\};W_p(\mathbf{R}))),$$

$$\Xi_r=\{\varphi\in C(\Lambda;w_p(\mathbf{T})):\ \varphi_\pm=\varphi_{|\mathbf{R}\times\{\pm1\}}\in C_p(\dot{R})\otimes w_p(\mathbf{T})\},$$

$$\Xi_0=\{\psi\in C(\Lambda\times\mathbf{T}\times\{-1;+1\}):\ \psi_\pm=\psi_{|\mathbf{R}\times\{\pm1\}\times\mathbf{T}\times\{-1;+1\}}\in C_p(\dot{R})\otimes C(\mathbf{T}\times\{-1;+1\})\}$$

с естественными нормами и эпиморфизмы

$$\upsilon_j:\ \Xi_j\to\Xi_0,\ \ j\in\{f;\ r\},$$

определяемые соответствующими формулами,

$$\upsilon_f(\varphi)=\sigma_{\mathbf{R}}\otimes id_{C(\mathbf{T}\times\{-1;+1\})},\qquad \upsilon_r(\varphi)\big|_{\mathbf{R}\times\{\pm1\}\times\mathbf{T}\times\{-1;+1\})}=(id\otimes\sigma_{\mathbf{T}})(\varphi_{|\mathbf{R}\times\{\pm1\}}).$$

При построении символического исчисления для банаховой алгебры $Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))$ будем следовать методам теории операторов билокального типа (см.[9-10]). Нетрудно видеть, что алгебра $Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))$ порождена парными операторами вида

$$A=\lambda I+\chi_0\,\hat{\pi}^{-1}(A_{0,-}\otimes a_{0,-}P_-+A_{0,+}\otimes a_{0,+}P_+)+$$
$$+\chi_\infty\,\hat{\pi}^{-1}(A_{\infty,-}\otimes a_{\infty,-}P_-+A_{\infty,+}\otimes a_{\infty,+}P_+),\qquad(10)$$

где $A_{0,\pm}$, $A_{\infty,\pm}\in V_p(\mathbf{R}_+)$, а $a_{\infty,\pm}$, $a_{0,\pm}\in C(\mathbf{T})$ (см. (8)).

Определим два частичных символа оператора A вида (10) – радиальный $\sigma_{p,r}(A)$ $(\in\Xi_r)$:

$$\sigma_{p,r}(A)\big|_{\mathbf{R}\times\{-1\}}=\lambda+\sigma_{\mathbf{R}}(A_{0,-})a_{0,-}P_-+\sigma_{\mathbf{R}}(A_{0,+})a_{0,+}P_+,$$

$$\sigma_{p,r}(A)\big|_{\mathbf{R}\times\{+1\}}=\lambda+\sigma_{\mathbf{R}}(A_{\infty,-})a_{\infty,-}P_-+\sigma_{\mathbf{R}}(A_{\infty,+})a_{\infty,+}P_+,$$

и послойный $\sigma_{p,f}(A)$ $(\in\Xi_f)$:

$$\sigma_{p,f}(A)\big|_{\mathbf{T}\times\{\pm1\}}=\lambda+\chi_-A_{0,\pm}a_{0,\pm}+\chi_+A_{\infty,\pm}a_{\infty,\pm}.$$

Теперь для оператора A определим слабый символ $\sigma_{p,0}(A)$ $(\in\Xi_0)$:

$$\sigma_{p,0}(A)\big|_{\mathbf{R}\times\{-1\}\times\mathbf{T}\times\{\pm1\}}=\lambda+\sigma_{\mathbf{R}}(A_{0,\pm})a_{0,\pm},\quad \sigma_{p,0}(A)\big|_{\mathbf{R}\times\{+1\}\times\mathbf{T}\times\{\pm1\}}=\lambda+\sigma_{\mathbf{R}}(A_{\infty,\pm})a_{\infty,\pm}.$$

Лемма 3. Сопоставления $A|\to\sigma_{p,r}(A)$, $A|\to\sigma_{p,f}(A)$, $A|\to\sigma_{p,0}(A)$, где A – оператор вида (10), распространяются до эпиморфизмов банаховых алгебр:

$$\sigma_{p,r}:\ Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))\to\Xi_r,\quad \sigma_{p,f}:\ Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))\to\Xi_f,\quad \sigma_{p,0}:\ Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))\to\Xi_0,$$

при этом выполняются равенства:

$$\upsilon_r\sigma_{p,r}=\upsilon_f\sigma_{p,f}=\sigma_{p,0}.\ €$$

Банахова алгебра $w_p(\mathbf{T})\otimes w_p(\mathbf{T})$, состоящая из бисингулярных операторов на торе $\mathbf{T}\times\mathbf{T}$, исследована билокальным методом в работе В.С.Пили-

ди [9], а алгебра $W_p(\mathbf{R})\otimes W_p(\mathbf{R})$, порожденная операторами бисвертки на плоскости, исследована аналогичным способом Р.В.Дудучавой в [12]. Банахова алгебра $Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))$ тесно связана с банаховой алгеброй операторов билокального типа $\mathfrak{R}_p(\mathbf{R}\times\mathbf{T})=W_p(\mathbf{R})\otimes w_p(\mathbf{T})$ $(\subset End(L_p(\mathbf{R}\times\mathbf{T})))$. Именно для произвольной ненулевой точки $\overline{x}=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ через $\overline{x}^{\,0}=(x_1^0,x_2^0)$ обозначим точку $\overline{x}/||\overline{x}||\in\mathbf{T}$ и зададим отображение u: $L_p(\mathbf{R}\times\mathbf{T})\to L_p(\mathbf{R}^2)$ формулой

$$((u)f)(x_1,x_2)=||\overline{x}||^{-2/p} f(-\ln||\overline{x}||,\overline{x}^{\,0}).$$

Нетрудно видеть, что отображение u является изоморфизмом банаховых пространств. Формула $\hat{u}(A)=uAu^{-1}$, где $A\in End(L_p(\mathbf{R}\times\mathbf{T}))$ определяет изоморфизмом подобия банаховых алгебр,

$$\hat{u} : End(L_p(\mathbf{R}\times\mathbf{T}))\to End(L_p(\mathbf{R}^2)).$$

На основе прямых вычислений действия изоморфизма $\hat{u}$ на операторах из алгебраического тензорного $W_p(\mathbf{R})\circ w_p(\mathbf{T})$ доказывается

Теорема 2. $\hat{u}(\mathfrak{R}_p(\mathbf{R}\times\mathbf{T})) = Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))$. €

Рассмотрим определяемую парой эпиморфизмов $\upsilon=(\upsilon_r,\upsilon_f)$ расслоенную сумму $\Xi_{p,*} = \Xi_{p,r}\oplus_\upsilon \Xi_{p,f}$ алгебр $\Xi_{p,r}$ и $\Xi_{p,f}$ [11], т. е. алгебру

$$\Xi_{p,*} =\{(b_r, b_f)\in \Xi_{p,r} \times \Xi_{p,f} : \upsilon_r(b_r)= \upsilon_f(b_f)\},$$

которая является банаховой алгеброй с нормой $||(b_r, b_f)|| = \max\{|| b_r ||;|| b_f ||\}$. Основным результатом работы является следующая теорема, содержащая конструкцию полного символа $\sigma_{p,*}$ и условия фредгольмовости операторов из $Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))$.

Теорема 3. I. Отображение $\sigma_{p,*} : Alg_p(FS(\mathbf{R}^2)) \to \Xi_{p,*}$, определяемое равенством $\sigma_{p,*}(A)=(\sigma_{p,r}(A), \sigma_{p,f}(A))$, где $A\in Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))$ является эпиморфизмом банаховых алгебр с ядром $Comp(L_p(\mathbf{R}^2))$.

II. Пусть $B\in Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))$, тогда:

(1) $B\in Fr(Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))) \Leftrightarrow \sigma_{p,r}(B)\in G\Xi_{p,r}, \sigma_{p,f}(B)\in G\Xi_{p,f}$;

(2) $B\in Fr(Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))) \Leftrightarrow \sigma_{p,*}(B)\in G\Xi_{p,*}$;

(3) $B\in Fr(Alg_p(FS(\mathbf{R}^2))) \Rightarrow \sigma_{p,0}(B)\in G\Xi_{p,0}$.€

Доказательство теоремы 3 проводится с помощью методов теории операторов билокального типа [9, 10] и основано на последовательном применении теоремы 2 и лемм 2, 3.

Выводы. В работе исследована банахова алгебра, порожденная новым классом парных двумерных интегральных операторов с однородными ядрами, включающим в себя известный класс операторов с SO(2)-инвариантными ядрами. Для нее построено символическое исчисление, с помощью которого получен критерий фредгольмовости. Отметим, что оба частичных символа – и радиальный $\sigma_{p,r}$, и послойный $\sigma_{p,f}$ – являются операторно-значными отображениями и, следовательно, необходимые и достаточные условия фредгольмовости, сформулированные в утверждениях II(1) и II(2) теоремы 3, содержат проверку обратимости операторов в бесконечномерных пространствах и не являются эффективно проверяемыми. Необходимое условие фредгольмовости, сформулированное в утверждении II(3)

теоремы 3, содержит проверку обратимости матричного слабого символа $\sigma_{p,0}$ и, следовательно, являются эффективно проверяемым.

Авторы выражают искреннюю признательность профессору В.С. Пилиди, предоставившему существенно дополненную и значительно усовершенствованную версию статьи [9].

Библиографический список

1. Karapetiants N., Samko S. Equations with Involutive Operators. - Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 2001. - 427 p.

2. Карапетянц Н.К. Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами // Математические заметки. – 1981. – Т.30. – Вып.5. – С.787–794.

3. Авсянкин О.Г., Карапетянц Н.К. Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными ядрами с переменными коэффициентами // Известия вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Математика. – 2001. – N1. – С. 3–10.

4. Авсянкин О.Г. Об алгебре парных интегральных операторов с однородными ядрами. // Математические заметки. – 2003. – Т.73. – Вып.4. – С. 483–493.

5. Деундяк В.М., Степанюченко Е.А. Исследование разрешимости интегральных операторов с однородными ядрами послойно сингулярного типа в пространстве $L_p(\mathbf{R}^2)$. // Тр. Междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 5-11 сент. 2006. – Ростов-на-Дону: РГУ, 2006. – С. 121–123.

6. Симоненко И.Б., Чинь Нгок Минь. Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость. – Ростов-на-Дону: РГУ, 1986. – 80 с.

7. Авсянкин О.Г., Деундяк В.М. Об индексе многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами и переменными коэффициентами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Математика. – 2005. – N3. – С. 3–12.

8. Деундяк В.М., Симоненко И.Б. Локальный метод в парах L_p-пространств и семейства операторов типа свертки // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Естественные науки. Спецвыпуск. – 2005. – С. 49–55.

9. Пилиди В.С. О бисингулярном уравнении в пространстве L_p // Математические исследования. – 1968. – Т.3. – N1.– С.108–122.

10. Пилиди В.С., Сазонов Л.И. Локальный метод в теории операторов типа бисингулярных уравнений // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Естественные науки. Спецвыпуск. – 2005. – С. 100–106.

11. Деундяк В.М. Гомотопическая классификация и вычисление индекса семейств многомерных бисингулярных интегральных операторов // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Математика. – 1996. – N1. – С. 34–47.

12. Дудучава Р.В. Интегральные операторы свертки на квадранте с разрывными символами // Известия АН СССР. Сер. Математика. – 1976. – Т.40. – №2. – С. 388–407.

Материал поступил в редакцию 22.11.06.

V.M. DEUNDYAK, H.A. STEPANUCHENKO

ON INTEGRAL OPERATORS WITH FIBER SINGULAR TYPE HOMOGENEOUS KERNELS IN THE SPACE $L_p(R^2)$.

A new class of integral operators with fiber singular type homogeneous kernels in the space $L_p(R^2)$ is introduced. This new class includes the class of operators with SO(2)–invariant homogeneous kernels. For Banach algebra of pair operators with fiber singular type homogeneous kernels the symbol calculus is constructed and the criterion of Fredholmness is obtained.

ДЕУНДЯК Владимир Михайлович (р. 1950), доцент кафедры «Алгебра и дискретная математика» Южного федерального университета и кафедры «Математика» Донского государственного технического университета, канд. физ.-.мат. наук (1976). Окончил механико-математический факультет РГУ (1972).
Основные научные интересы: алгебраические методы изучения разрешимости сингулярных интегральных уравнений в весовых пространствах, топологические методы исследования банаховых алгебр операторов свертки, применение математических методов в защите информации.
Автор более 150 публикаций.

СТЕПАНЮЧЕНКО Елена Анатольевна, старший преподаватель кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» Донского государственного технического университета, аспирант кафедры «Алгебра и дискретная математика» Южного федерального университета. Окончила механико-математический факультет РГУ (2000).
Основные научные интересы: изучение разрешимости многомерных интегральных уравнений, применение математических методов в защите информации.
Имеет 5 публикаций.